

Лекция 1

Вводная. Основные характеристики атмосферных процессов. Масштабы атмосферных движений.

За последние годы в связи с внедрением мощных компьютеров во все сферы метеорологического обеспечения мировой хозяйственной деятельности именно численные (гидродинамические) методы анализа и прогноза погоды получили наибольшее развитие и распространение.

Традиционно считается, что проблему предсказания погоды, как задачу математической физики, поставил В.Бьеркнис еще в начале двадцатого века (1904 год). В своей статье «Проблема предсказания погоды» он рассмотрел прогноз развития атмосферных процессов с точки зрения математики и механики. Именно в этой работе впервые прогнозирование погоды формулируется как задача с начальными данными для уравнений гидромеханики бароклинной жидкости.

Первую, к сожалению, неудачную попытку расчета будущей погоды путем численного решения уравнений гидромеханики предпринял Л.Ричардсон. В 1922 году появилась его книга «Предсказание погоды с помощью численного процесса», в которой он описал свой опыт гидродинамического прогноза. С позиции сегодняшнего дня неудачи Ричардсона кажутся очевидными:

- отсутствие данных о вертикальной структуре начальных полей метеорологических величин,
- излишняя сложность использованной гидродинамической модели для крупномасштабного суточного прогноза,
- не совсем корректный выбор конечно-разностных схем численного интегрирования этой модели.

Кроме того, развитие намеченного Ричардсоном пути исследования было практически невозможным из-за полного отсутствия вычислительной техники.

Несколько иной путь исследований в этой области был предложен в фундаментальных работах российской школы теоретиков-метеорологов, а именно в работах А.А.Фридмана. Этот путь основан на выявлении главных погодообразующих факторов путем оценки отдельных членов основных уравнений гидротермодинамики атмосферы и дальнейшей фильтрации этих уравнений. В 1940 году была опубликована работа И.А.Кибеля «Приложение к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости», в которой предложен фундаментальный принцип упрощения уравнений гидромеханики – разложение по малому параметру. В дальнейшем этот подход, так называемое «квазигеострофическое приближение», широко применялся при построении схем численного прогноза.

Еще одним этапом в развитии гидродинамической теории прогноза погоды являлось построение в конце сороковых годов нелинейной одноуровневой модели почти одновременной в США и СССР. (В США – Дж.

Чарни, в СССР – А.М.Обуховым). Интересно отметить, что основоположник кибернетики и создатель быстродействующих вычислительных машин Джон Нейман стал соавтором (наряду с Чарни и Фьортофтом) одной из первых работ по реализации уравнений квазигеострофического приближения на электронно-вычислительной машине.

Создание гидродинамической теории краткосрочного прогноза метеорологических полей, безусловно, самым крупным успехом физики атмосферы в 50-х годах прошлого века. Гидродинамический прогноз во многом облегчил труд инженеров – синоптиков и способствовал некоторому повышению качества прогноза. Одна из первых схем численного прогноза С.Л.Белоусова (1957 год) послужила основой для организации в Гидрометцентре СССР оперативной технологии численного прогноза барических полей на сутки. Уровень успешности самих численных прогнозов был невысоким. Характерная относительная ошибка прогноза геопотенциала в средней тропосфере по квазигеострофической модели составляла на сутки 75%.

Отказ от квазигеострофического приближения и применение численных моделей атмосферы, основанных на использовании полных уравнений в квазистатическом приближении, позволили увеличить оправдываемость прогноза в среднем на 10 – 12%. Кроме того, помимо прогноза поля давления с помощью численных схем по полным уравнениям можно было прогнозировать поля ветра и температуры. Следующим этапом в развитии гидродинамических методов стал учет в моделях влажностных процессов, радиационного и других видов притоков тепла и, как следствие, осуществление первых численных экспериментов по моделированию общей циркуляции атмосферы и климата. В отличие от численного прогноза, при котором используются фактические начальные данные о состоянии атмосферы, при численном моделировании интегрирование уравнений модели осуществляется, отправляясь от некоторых фиктивных (искусственных) начальных данных. Именно к началу семидесятых годов численное моделирование крупномасштабных атмосферных процессов заняло центральное место в Программе исследований глобальных атмосферных процессов (ПИГАП). К тому времени в мире уже существовало большое число глобальных и полусферных моделей, заметно различающихся как по физическому содержанию, так и по методам численного решения. В связи с этим на пятой сессии Объединенного Организационного комитета (ООК) ПИГАП (Торонто, октябрь 1971года) было принято решение собрать и опубликовать описание этих моделей. По рекомендации профессора Машковича С.А. все модели можно разбить весьма условно на три группы.

К первой группе следовало бы отнести разработанные в США глобальные модели по полным уравнениям гидротермодинамики, с числом уравнений от двух до восемнадцати. В этих моделях использовались всевозможные варианты конечно-разностной аппроксимации и различные способы параметризации атмосферного пограничного слоя, конвекции, радиации, орографических эффектов и т.д. Во вторую группу входили

гидродинамические модели, которые можно было использовать только для прогностических целей, а именно, для среднесрочного и краткосрочного прогнозов. Например, конечно-разностная прогностическая модель Гидрометцентра СССР Л.В.Берковича. Если к первым двум группам были отнесены модели, в которых использовались конечно-разностные аппроксимации производных, то к третьей группе можно отнести модели с иным – спектральным подходом к решению задачи. О различии спектрального и конечно-разностного методов аппроксимации уравнений будет изложено ниже.

В последующие десятилетия развитие системы усвоения глобальных метеорологических наблюдений и разработка глобальной базовой модели атмосферы, максимально точной при существующей сети наблюдений, становятся главными задачами для специалистов – метеорологов. В 1983 году Европейский центр среднесрочных прогнозов погоды (ЕЦСПП) создал целую научно-оперативную линию глобального среднесрочного прогноза погоды (СПП), обеспечивающую многие страны надежными прогнозами погоды.

Таким образом, с момента появления первых одноэлементных моделей численных прогнозов на сутки в конце пятидесятых годов, мировым метеорологическим сообществом был проделан огромный путь до создания глобальных физически достоверных и точных моделей. Кроме ЕЦСПП, в настоящее время глобальными спектральными моделями обладают такие страны, как Россия, США, Япония, Австралия, Германия и Франция и ряд других государств Европы и Америки. Эти модели имеют разрешение по горизонтали 100-200 км и отличаются друг от друга не столько оригинальностью численных схем, сколько тщательностью параметризаций, учетом систематических ошибок прогнозов и документированностью компьютерных программ.

Однако, верно спрогнозировать глобальные поля метеорологических элементов – это хотя и очень важное условие, но отнюдь не достаточное. Необходимо осуществить переход от расчетов гидродинамического прогноза полей отдельных метеорологических величин к прогнозу локальной *погоды* гидродинамическими методами. Эффективность практического использования гидродинамических методов прогноза характеристик ожидаемой погоды в значительной мере зависит от уровня их технологической реализации. Наиболее перспективным решением этой задачи является выполнение прогностических расчетов метеорологических величин и явлений погоды в конкретных пунктах с применением персональных компьютеров, подключенных к Глобальной сети Интернет.

1. Основные характеристики параметров атмосферы и атмосферных движений.

Основным источником энергии атмосферных процессов является солнечное тепло. Мощность этого источника на Земле составляет 10^{17} Вт, но лишь небольшая часть этой энергии (около 20%) превращается в

кинетическую энергию атмосферных движений. Скорость превращения потенциальной энергии в кинетическую составляет $2 \cdot 10^{15}$ Вт, так что К.П.Д. «атмосферной машины» приблизительно 2%. Средняя скорость инерции кинетической энергии в единице массы равна $4 \cdot 10^{-4} \frac{м^2}{сек^3}$. Такой же порядок имеет и средняя удельная скорость диссипации кинетической энергии в теплоту за счет трения. Типичное время превращения энергии составляет семь дней. Время вырождения энергии синоптических процессов вследствие вязкости имеет тот же порядок. Характерный масштаб длины для синоптических процессов составляет ≈ 3000 км.

Спектр колебаний во времени основных метеорологических величин, которые участвуют в формировании погоды, очень пестрый. Его можно разбить, следуя классификации А.С.Монина, на шесть интервалов:

1. Микрометеорологические колебания с периодом от долей секунды до нескольких минут. Наибольший вклад в них вносит мелкомасштабная турбулентность. Кроме турбулентности в число микрометеорологических колебаний входят также акустические волны с периодом ≤ 300 сек и короткопериодные гравитационные волны с периодом не более 330 сек.
2. Мезометеорологические колебания с периодом от минуты до нескольких часов. К числу мезопроцессов можно отнести атмосферные фронты, развитие кучевой облачности, орографические возмущения и др.
3. Синоптические колебания с периодом от многих часов (10-20) до недели. В этот интервал попадают также суточные колебания температуры и давления. В высокочастотной части синоптического интервала происходит каскадная передача энергии по спектру от крупномасштабных движений к мелкомасштабным, вследствие гидродинамической неустойчивости. На низкочастотном конце синоптического интервала имеет место передача энергии в противоположном направлении – от синоптических движений к движениям более крупного масштаба.
4. Глобальные колебания с периодом от недели до месяцев, представляющие наибольший интерес для проблем долгосрочного прогнозирования.
5. Сезонные колебания – то есть колебания с годовым периодом.
6. Междугодовые колебания – с периодом в несколько лет.

Вклад вышеперечисленных процессов в формирование погоды неодинаков. Акустические колебания практически не оказывают влияния на погодные условия. Но эти мелкопериодные колебания могут существенно искажать результаты численного интегрирования уравнений модели. Погода в конкретном месте и в определенное время суток будет определяться, в основном, мезомасштабными колебаниями, развивающимися на фоне синоптических крупномасштабных процессов. И, наконец, погода на больших территориях (например, на

Европейской части России) формируется под влиянием процессов синоптического масштаба, хотя мелкомасштабные процессы вносят свой небольшой вклад в это формирование.

Таким образом, если перед нами стоит задача построения гидродинамической прогностической модели для фонового прогноза погоды (то есть, прогноза основных метеовеличин на значительной территории и на срок до 5–6- суток), то уравнения этой модели должны достаточно успешно описывать именно крупномасштабные синоптические атмосферные процессы.

Лекция 2.

Система основных уравнений гидротермодинамики и принципиальная схема прогноза на их основе

Основу всех прогностических моделей атмосферных процессов составляют уравнения движения, притока тепла, неразрывности переноса влаги и атмосферных примесей. Эти уравнения являются математическим выражением законов физики (законы сохранения количества движения, законы сохранения энергии и закон сохранения массы), а также уравнения состояния. Рассмотрим замкнутую систему полных уравнений в адиабатическом приближении (без учета притоков тепла и фазовых переходов), включающую уравнение статики, и разберем принципиальную схему гидродинамического прогноза. Запишем эту систему в изобарической системе координат в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu, \\
 T &= -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0, (*) \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g} (\gamma_a - \gamma) \frac{\tau}{p} &= 0, \\
 \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \tau \frac{\partial q}{\partial p} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

где u, v – составляющие вектора скорости ветра вдоль осей x и y ,

$\tau = \frac{dp}{dt}$ – аналог вертикальной скорости, P – давление.

R - газовая постоянная, Φ – геопотенциал, T - температура, I - параметр Кориолиса, g – ускорение силы тяжести, γ, γ_a - сухоадиабатический и вертикальный градиенты температуры соответственно, q -массовая доля водяного пара.

Система уравнений (2.1) не содержит членов, описывающих неадиабатичность и трение. В связи с этим, систему уравнений (2.1) лучше всего использовать для краткосрочного прогноза погоды в свободной атмосфере, где эти эффекты менее значимы.

Несмотря на указанные ограничения, система уравнений (2.1) обладает большой общностью, так как описывает широкий класс атмосферных движений за исключением звуковых волн, которые отфильтровываются из решений этой системы с помощью уравнения статики.

Система шести уравнений (2.1) в том виде, как она записана, позволяет спрогнозировать поведение пяти функций – u, v, Φ, T, τ, q – если задать соответствующие начальные и граничные условия. Эта система включает четыре уравнения, содержащие производные по времени, а поэтому их называют прогностическими, и два уравнения, которые не содержат таких производных и являются диагностическими. **Если мы не будем прогнозировать массовую долю водяного пара, то уравнений будет пять.** Прогностические уравнения являются нелинейными, и поэтому могут быть проинтегрированы только приближенно шагами по времени. При этом весь промежуток времени, на который необходимо рассчитать прогноз, разбивается на малые части Δt (шаги). В пределах каждого шага изменения всех прогностических функций считается линейными, и определяются по формулам вида

$$\varphi(t_0 + \Delta t) = \varphi(t_0) + F_{i,0} \Delta t, \quad (2.2)$$

где t_0 – начальный момент времени, φ - любая прогностическая функция. Через F обозначены все члены прогностических уравнений, не содержащие производных по времени. Нижний индекс у F обозначает, что все члены, входящие в F , определены в начальный момент времени.

Формула (2.2) получены в результате замены производной по времени направленной разностью вперед. Иные способы замены непрерывных производных конечными разностями будут представлены ниже. Как следует из формулы (2.2), для вычисления будущих значений функции $\varphi(t_0 + \Delta t)$ необходимы их значения в начальный момент времени, то есть, начальные условия. Кроме начальных условий необходимо также поставить граничные условия по переменным x, y, p . По осям x и y простейшие граничные условия ставятся в виде неизменности во времени прогностических функций, а именно

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0$. По переменной p граничные условия ставятся для τ в виде:

$$\tau = 0 \text{ при } p = 0, \quad (2.3)$$

$$\tau = \frac{1}{RT} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad \text{при } P = 1000 \text{ гПа} \quad (2.4).$$

Начальные условия для u , v , Φ и T задаются по данным наблюдений на сети станций, проинтерполированным в узлы сеточной области G , на которой строится решение системы уравнений (2.1).

Вертикальная скорость w не измеряется, но она может быть рассчитана на любом уровне p по начальным значениям u и v с помощью уравнения неразрывности, проинтегрированного по вертикальной переменной в пределах от 0 до p . Таким образом, получаются начальные данные для всех пяти функций, подлежащих прогнозированию с помощью системы (2.2).

Принципиальная схема прогноза на основе уравнений (2.2) представляется следующим образом. По значениям функций u , v , τ , Φ , T в начальный момент времени t_0 с помощью прогностических уравнений рассчитываются частные производные от u , v , T , и прогностические значения этих функций на различных уровнях $p = \text{Const}$, а с помощью уравнения неразрывности определяется $\tau(t_0 + \Delta t)$ по формуле:

$$\tau(p)(t_0 + \Delta t) = - \int_0^p \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)^{t_0 + \Delta t} dp', \quad (2.5)$$

Затем с помощью граничного условия (2.4) вычисляются $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ и $\Phi(t_0 + \Delta t)$ на уровне $p = 1000$ гПа с помощью соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{p=1000} &= (R\tau T) \Big|_{p=1000} - \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \Big|_{p=1000}, \\ \Phi \Big|_{p=1000}^{t_0 + \Delta t_0} &= \Phi \Big|_{p=1000}^{t_0} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \Big|_{p=1000} \Delta t. \end{aligned} \quad (2.6)$$

После этого определяется геопотенциал всех вышележащих уровней по уравнению статики

$$\Phi(p) = R \int_p^1 \frac{T(p)}{p} dp \quad (2.7)$$

В результате получаются значения всех пяти функций в конце первого шага по времени. Повторяя многократно эти вычисления можно получить прогноз на нужный интервал времени прогноза.

В локальной декартовой системе координат ось x направлена на восток, ось y – на север, ось z – по местной вертикали. В этой системе координат уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lv, \end{aligned}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u \rho}{\partial x} + \frac{\partial v \rho}{\partial y} + \frac{\partial w \rho}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g p} \frac{dp}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

Обратим внимание на то, что вариант адиабатический, без притоков тепла. Для несжимаемой жидкости уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u \rho}{\partial x} + \frac{\partial v \rho}{\partial y} + \frac{\partial w \rho}{\partial z} = 0, \text{ представляющее собой закон сохранения массы,}$$

превращается в уравнение неразрывности, идентичное уравнению (*),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

а уравнение статики выглядит таким образом:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Лекция 3

Уравнения гидротермодинамики в σ - системе координат.

В настоящее время в современных гидродинамических моделях используется σ - система координат, или гибридная система координат. Разберем подробнее данную систему координат, выявим ее достоинства и недостатки.

В σ -системе координат в качестве вертикальной координаты используется

$\sigma = \frac{P}{P_s}$, где $P_s = P_s(t, x, y)$ - приземное давление, являющееся переменной

величиной. Аналогом вертикальной скорости в этой системе координат является переменная

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{p_s} \right) \quad (3.1)$$

Легко убедиться, что на подстилающей поверхности и на верхней границе атмосферы, (то есть на $\sigma = 1$ и на $\sigma = 0$) аналог вертикальной скорости $\dot{\sigma} = 0$.

Горизонтальные координаты в этой системе координат будут соответственно

$$x_\sigma = x_p = x, \quad y_\sigma = y_p = y.$$

Запишем уравнения движения в σ - системе координат.

Для этого сначала переведем в эту систему координат производные по времени и пространству.

$$\frac{\partial f}{\partial x_p} = \frac{\partial f}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_p} = \frac{\partial f}{\partial y_\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_p} = \frac{\partial f}{\partial t_\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_p} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p} = \frac{1}{P_s} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = - \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\sigma}{p_s} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\sigma}{p_s} \quad (3.7).$$

Подставим соотношения (3.2)-(3.7) в уравнения движения,

$$\frac{du}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv + F_x \quad (3.8)$$

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu + F_y \quad (3.9)$$

записанные в изобарической системе координат (ИСК).

Получаем:

$$\frac{du}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial x} + lv + F_x \quad (3.10)$$

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial y} - lu + F_y \quad (3.11)$$

Обратите внимание на то, что в уравнениях появляется дополнительное слагаемое, связанное с приземным давлением p_s !!

Уравнение статики запишем в виде:

$$T = - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (3.12).$$

Подставим уравнение (3.12) в (3.10) и (3.11). В заключении получим уравнения движения в виде:

$$\frac{du}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} + lv + F_x$$

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} - lu + F_y$$

Если записать уравнение в виде:

$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = - \frac{RT}{\sigma}$ и проинтегрировать от 1 до σ , то получим уравнение для расчета геопотенциала Φ на любой σ -поверхности.

Уравнение неразрывности в σ -системе координат можно записать в следующем виде:

$$\dot{\sigma}(\sigma) = \frac{\sigma}{p_s} \int_0^1 \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma - \frac{1}{p_s} \int_0^\sigma \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma' \quad (3.13)$$

Для p_s прогностическое уравнение запишем в виде:

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = - \int_0^1 \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma.$$

Уравнение притока тепла можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T} \frac{1}{C_p \rho} E, \quad (3.14)$$

где E – притоки тепла, а потенциальная температура θ равна:

$$\theta = T \left(\frac{1000}{\sigma p_s} \right)^{0,288} \quad (3.15)$$

Уравнение для переноса водяного пара имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial q}{\partial p} = 0 \quad (3.16)$$

Для замыкания системы уравнений положим приток тепла равным нулю (то есть, адиабатический вариант).

Также, будем считать, что F_x и F_y равны нулю. Тогда прогностическими переменными будут являться составляющие скорости ветра u, v , потенциальная температура θ и приземное давление p_s , а диагностическими – геопотенциал Φ , аналог вертикальной скорости $\dot{\sigma}$ и абсолютная температура T .

Достоинством σ -системы координат является тот факт, что в данной системе можно достаточно точно учесть топографию. Но для высоких слоев атмосферы лучше использовать ИСК. Поэтому в современных моделях используют гибридную систему координат. До уровня 500 гПа - σ -систему, а выше – ИСК.

Так как начальные данные задаются на изобарических поверхностях, то для работы с σ -системой необходимо переинтерполировать данные с изобарических поверхностей на σ -поверхности. Обратная интерполяция необходима для получения прогностических карт барической топографии.

Лекция 4.

Конечно-разностная аппроксимация производных и уравнений

Как известно, методов точного решения нелинейных уравнений (2.1) не существует (исключая некоторые частные случаи). Поэтому для решения их в целях гидродинамического прогноза полей метеовеличин применяются приближенные методы, в частности, метод сеток. Следует отметить, что в последнее время наряду с методом сеток широко используются спектральные методы, в которых предусматриваются разложения полей с помощью рядов по ортогональному базису, а решения строятся относительно коэффициентов разложения. Тем не менее, рассмотрим в этом параграфе основные положения метода сеток, а в дальнейшем остановимся на некоторых особенностях спектрального метода.

Метод сеток предусматривает задание дискретных значений метеовеличин в области определения решений уравнений. В пределах этой области выбирается система отсчета и вводятся дискретные значения независимых переменных и безразмерные координаты на основе соотношений:

$$i = \frac{x}{\Delta x}, \quad j = \frac{y}{\Delta y}, \quad k = \frac{\zeta}{\Delta \zeta}, \quad s = \frac{t}{\Delta t}$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta \zeta$ - шаги по пространству, Δt - шаг по времени. Совокупности точек, положение которых определяется дискретными безразмерными координатами в пространстве и во времени, называются пространственно-временными сетками, а точки этих сеток - узлами.

В методе сеток непрерывный пространственно-временной континуум заменяется дискретным множеством точек, а поля функций (метеовеличин) $f(x, y, \zeta, t)$ задаются в виде множества сеточных значений функций $f_{i,j,k}^s$. Сетки различаются по числу узлов, размеру шагов, структуре ячеек и способу размещения метеовеличин в узлах сетки.

Так как в методе сеток предусматривается дискретное представление полей, то производные в дифференциальных уравнениях вычисляются с помощью конечных разностей. Замена непрерывных производных конечными разностями называется конечно-разностной аппроксимацией.

В результате замены производных в дифференциальных уравнениях гидротермодинамики и в граничных условиях получают конечно-разностные уравнения, которые носят название конечно-разностных аналогов (аппроксимаций) уравнений и граничных условий. Системы конечно-разностных уравнений называют также численными моделями. Совокупность конечно-разностных уравнений представляет собой замкнутую систему алгебраических уравнений. Следовательно, метод сеток позволяет решение краевой задачи с начальными условиями для дифференциальных уравнений свести к решению систем алгебраических уравнений.

Для аппроксимации первых производных по пространству и по времени в уравнениях гидротермодинамики используются направленные вперед или назад и центральные (центрированные) разности следующего вида:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q &\approx \frac{1}{\Delta r} (f_{q+1} - f_q), \\ \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q &\approx \frac{1}{\Delta r} (f_q - f_{q-1}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\Delta r} (f_{q+1} - f_{q-1}),$$

где

r - любая координата, а $f(r)$ - любая функция.

В тех случаях, когда функция зависит от пространственных переменных и времени, для записи сеточной функции будут использоваться два индекса, например f_q^s .

Для получения оценок погрешностей производных, аппроксимируемых конечными разностями (3.1), функция f представляется в ряд Тейлора в окрестности точки q .

$$f(r \pm \Delta r) = f(r) \pm \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_r \Delta r + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_r \frac{(\Delta r)^2}{2!} \pm \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right) \frac{(\Delta r)^3}{3!} + \dots$$

Если в формулы (3.1) подставить такое разложение, то получатся формулы для оценки погрешностей ε , а именно:

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{\Delta r} (f_{q+1} - f_q) - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) \frac{\Delta r}{2!} + \dots,$$

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{\Delta r} (f_q - f_{q-1}) - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) \frac{\Delta r}{2!} + \dots,$$

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{2\Delta r} (f_{q+1} - f_{q-1}) - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right) \frac{(\Delta r)^3}{3!} + \dots$$

Величину ε называют ошибкой аппроксимации производных.

Порядок величины ε определяется степенью Δr в главных членах и называется порядком

точности аппроксимации производной. Согласно выражениям для ошибок аппроксимации производных направленными и центральными разностями они имеют соответственно первый и второй порядок точности аппроксимации. Если ошибка аппроксимации стремится к нулю при стремлении шага сетки к нулю, то такая аппроксимация называется согласованной. Аппроксимация первой производной будет *согласованной*, если она имеет, по крайней мере, первый порядок точности.

Для второй производной получаем следующую формулу аппроксимации:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \approx \frac{1}{\Delta r^2} (f_{q+1} - 2f_q + f_{q-1})$$

Эта аппроксимация является аппроксимацией второго порядка точности.

Конечно-разностный аналог для двумерного оператора Лапласа выражается формулой:

$$\nabla^2 f_{i,j} \equiv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{1}{(\Delta r)^2} (f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}).$$

Атмосферные движения и поля метеорологических величин имеют, как известно, волновой характер. Поэтому интересным представляется оценить ошибку аппроксимации первой производной в зависимости от длины волны L и шага сетки. Если для аппроксимации производной использовать центральную конечную разность, а функцию $f(r)$ представить в виде

синусоиды $f(r) = A \sin mr$, где A – амплитуда, а m – волновое число,

то величина относительной ошибки аппроксимации имеет вид:

$$E = 1 - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^a / \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^t \equiv 1 - \frac{\sin m\Delta r}{mr}. \quad (4.2)$$

В формуле(4.2) верхний индекс означает соответственно аппроксимационное и точное значение производной. Как видно из формулы (4.2), относительная ошибка аппроксимации производной возрастает по мере уменьшения длины волны. Для двухшаговых волн конечно-разностное представление производной оказывается невозможным. Отсюда следует, что для конечно-разностной аппроксимации производных и уравнений шаг сетки необходимо выбирать с учетом длин волн, которые имеют значимые амплитуды.

При аппроксимации производных в конечно-разностных схемах, помимо согласованности и точности, учитываются и другие характеристики – экономичность вычислений, сходимость и устойчивость решений конечно-разностных уравнений, сохранение интегральных свойств прогностических моделей и многое другое. Некоторые из этих вопросов будут обсуждены в следующем параграфе.

Лекция 5.

Конечно-разностные схемы. Точность численного решения. Корректность, устойчивость и сходимость конечно-разностных схем.

Рассмотрим основные понятия и вопросы, связанные с построением конечно-разностных схем, на примере неоднородного дифференциального уравнения

$$Lf = \varphi \quad (5.1)$$

где L – дифференциальный оператор, f – искомая функция(решение), а φ заданная функция (правая часть уравнения).

Именно в таком общем виде можно записать любое дифференциальное уравнение в частных производных. В задачах гидродинамического прогноза искомая функция f зависит от времени и трех пространственных координат, то есть

$$\begin{aligned} f &= f(t, r) \\ \varphi &= \varphi(t, r) \end{aligned} \quad (5.2)$$

где r – пространственные независимые переменные, а t - время.

Решение уравнения (4.1) будем исследовать в области пространственных независимых переменных D , ограниченной границей Γ , и временем D_t . Задачу нахождения решения дифференциального уравнения, подчиненного начальным и граничным условиям, называют смешанной краевой задачей или нестационарной краевой задачей. Не будем пока обсуждать всевозможные способы задания начальных и граничных условия. В конечном счете, они зависят от конкретной задачи. В общем виде начальные условия и граничные представим таким образом:

$$\text{при } t = t_0 \text{ в } D \quad \psi(r) = f(r, t_0), \quad (5.3)$$

$$\text{и на } \Gamma \times D_t \quad g(r, t) = f(r, t) \quad (5.4),$$

где t_0 – начальный момент времени.

Приближенное решение дифференциального уравнения, получаемое с помощью конечно-разностного метода, называется численным решением. Ошибка численного решения определяется формулой:

$$\delta = f_q^s - f(r, t) \quad (5.5).$$

Так, как в общем случае точное решение неизвестно, то неизвестной является и ошибка численного решения. Тем не менее, можно оценить

точность конечно-разностной схемы, которая характеризуется ошибкой конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения.

Прежде всего, выполним дискретизацию независимых переменных

$$\begin{aligned} q &= r / \Delta r, \\ s &= (t - t_0) / \Delta t \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $\Delta r, \Delta t$ - шаги по пространству и по времени соответственно. При этом, непрерывную область изменения следует поставить в соответствие дискретную (сеточную) область – пространственно-временную сетку - узлами которой являются точки с индексами q, s . И, именно, на этой сетке определяются сеточные функции f_q^s, φ_q^s и сеточные операторы L_h, ψ_q, g_q^s .

В результате дифференциальной задаче (5.1)-(5.4) ставится в соответствие конечно-разностный аналог.

Для того, чтобы численное решение было близко к точному, необходимо, чтобы конечно-разностная схема удовлетворяла условиям *сходимости* и *устойчивости*. Кроме того, безусловным правилом для конечно-разностной аппроксимации уравнений является использование *согласованных* методов аппроксимации производных, которые определяют соответствующие уравнения. Порядок точности аппроксимации уравнений оценивается так же, как и производных. Для этого в конечно-разностные уравнения вместо сеточных функций подставляются разложенные в ряд Тейлора функции в окрестности точки с координатами $q\Delta r, s\Delta t$. Затем из результатов подстановки вычитается дифференциальное уравнение. Полученная таким способом разность представляет собой ошибку аппроксимации ε дифференциального уравнения

$$L_h f_q^s = \varphi_q^s \quad (5.7).$$

При этом $\psi_q = f_q^0, g_q^s = f_q^s$ в начальный момент времени и на границах. Порядок точности аппроксимации уравнений определяется степенью приращения независимых переменных, т.е. шагов по времени и по пространству в главных из отброшенных членов ряда Тейлора. Если при стремлении к нулю шагов по времени и по пространству ошибка аппроксимации стремится к нулю, то аппроксимация считается *согласованной*.

Проиллюстрируем оценку ошибки аппроксимации на примере однородного дифференциального уравнения – линейного уравнения адвекции

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad (5.8)$$

Где $f = f(r, t)$ - решение уравнения, а c - постоянная положительная величина. Физический смысл данного уравнения предельно ясен – локальное изменение неизвестной функции $f(t, r)$ зависит только от адвекции с постоянной скоростью по оси r . Построим в области изменения независимых переменных $(D+\Gamma) \times D_t$ пространственно-временную сетку, узлами которой служат точки с индексами $q=0, 1, \dots, Q$ ($q=r / \Delta r$), $s=0, 1, \dots, S$ ($s=t / \Delta t$). Получим конечно-разностный аналог уравнений (4.8)

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} = -c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} \quad (5.9)$$

На границе Γ необходимо задать граничные условия, о которых будем говорить в каждом конкретном случае, так как граничные условия всегда фиктивны и в той или иной мере искажают решение задачи. Начальные условия задаются в момент времени $s=0$.

Например $f_q^0 = f|_{t=0}$. В данном конкретном случае, для конечно-разностной аппроксимации уравнений, мы пользовались направленными разностями вперед по времени и центральными разностями – по пространству.

Разложим функции $f(r + \Delta r, t)$, $f(r - \Delta r, t)$, $f(r, t + \Delta t)$ в ряд Тейлора и подставим в конечно-разностный аналог (4.8), сохраняя первые три члена для производной по времени и первые четыре члена – для производной по пространству. Тогда ошибка конечно – разностного решения ε равна:

$$\varepsilon = 1/2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Delta t + 1/6c \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \Delta r^2 \quad (5.10)$$

Аппроксимация согласована, так как при стремлении шагов сетки к нулю, ошибка аппроксимации тоже стремится к нулю. Кроме того, по времени – аппроксимация первого порядка точности, а по пространству – второго. Это очевидно, так как порядок точности аппроксимации определяется минимальной степенью, в которую возводят шаги по времени и пространству. То есть,

$$\varepsilon = O(\Delta t, \Delta^2 r) \quad (5.11).$$

Следует отметить, что согласованность аппроксимации не зависит от соотношения $c \frac{\Delta t}{\Delta r} = \mu$, который называется критерием Куранта, Фридрихса, Леви, или критерием линейной устойчивости.

Дадим определение *корректности*, *сходимости* и *устойчивости* конечно-разностного решения.

1. Считается, что задача поставлена **корректно**, если при достаточно малых шагах по времени и пространству конечно-разностное решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных и граничных условий.
2. Понятие **сходимости** численных (конечно-разностных) решений также формулируется на основе оценок поведения ошибки ε . Численное решение и конечно-разностная схема, с помощью которой оно получено, называется **сходящимся**, если при стремлении $\Delta t, \Delta r$ к нулю, ошибка ε также стремится к нулю.
3. **Устойчивым** конечно-разностное решение называется только в том случае, если ε ограничена (не стремится к бесконечности) с увеличением срока прогноза, при фиксированных шагах по времени и пространству и при любых начальных и граничных условиях.

Лекция 6.

Метод Неймана для определения устойчивости конечно-разностных схем.

Приближенное решение дифференциального уравнения, получаемое с помощью конечно-разностного метода, называется численным, а разность между численным и точным решениями – ошибкой численного решения ε .

Поскольку точное решение в общем случае неизвестно, то неизвестна и ошибка численного решения. Можно, однако, оценить точность конечно-разностной схемы, с помощью которой получено численное решение. Эта точность характеризуется ошибкой конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения. Аппроксимация конечно-разностным уравнением дифференциального оценивается так же, как аппроксимация конечными разностями производных. Для этого в конечно-разностное уравнение вместо сеточных функций подставляются разложенные в ряд Тейлора функции в окрестности точки с координатами $q\Delta r, s\Delta t$. Затем из результатов подстановки вычитается дифференциальное уравнение. Полученная таким образом разность представляет собой ошибку аппроксимации.

Согласованность аппроксимации дифференциального уравнения состоит в том, что конечно-разностная аппроксимация должна переходить в исходное непрерывное уравнение в пределе, то есть при стремлении шагов сетки к нулю. ***Однако согласованность конечно-разностной схемы еще не гарантирует сходимости численного решения к точному решению дифференциальной задачи.***

В задачах численного прогноза погоды, а также в задачах моделирования общей циркуляции атмосферы первостепенное значение имеет понятие ***устойчивости***.

Численная схема будет устойчивой, если малая погрешность, внесенная на любом уровне по времени, не будет накапливаться. Иными словами, устойчивость решения представляет собой ограниченность ошибки конечно-разностного решения при фиксированных шагах по времени и по пространству, и при неограниченном росте времени прогноза T . ***Устойчивость конечно-разностной схемы, наряду с согласованностью аппроксимации, может обеспечить сходимость решения.***

При исследовании устойчивости большую роль играет специфика задачи. Для широкого класса задач в настоящее время широко используется метод Неймана. Он применяется при анализе вычислительной устойчивости конечно-разностных схем для линейных дифференциальных уравнений, точные решения которых известны. Этим методом предусматривается подстановка точных решений в конечно-разностную схему, а анализ устойчивости сводится к оценке множителя перехода λ , связывающего амплитуду возмущений на соседних уровнях по времени.

Точные решения линейных уравнений выражаются суммой частных решений, представляемых волновыми гармониками. Это позволяет анализировать устойчивость для каждой волновой гармонике. Устойчивость

конечно-разностной схемы для каждой гармоники означает устойчивость конечно-разностной схемы в целом. Рассмотрим метод Неймана на примере линейного уравнения адвекции, записанного в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad (6.1)$$

где $c = \text{const} > 0$. Точное решение линейного уравнения адвекции для дискретных аргументов имеет вид

$$f_q^s = A^s e^{imq\Delta r} \quad (6.2).$$

В точном решении амплитуде со временем не изменяется, а в конечно-разностном решении она может вести себя по-разному.

Запишем согласованную схему для линейного уравнения адвекции с помощью направленной вперед разности по t и направленной “против потока” разности по r :

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} + c \frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\Delta r} = 0 \quad (6.3)$$

и перепишем ее в виде

$$f_q^{s+1} = (1 - \mu)f_q^s + \mu f_{q-1}^s, \quad (6.4),$$

где $\mu = c \frac{\Delta t}{\Delta r}$ - критерий линейной устойчивости (критерий Куранта, Фридрихса, Леви).

Подставим решение (5.2) в (5.4) и сократим на множитель $e^{imq\Delta r}$.

В полученном выражении

$$A^{s+1} = (1 - \mu)A^s + \mu A^s \exp(-im\Delta r) \quad (6.5)$$

определим множитель перехода λ по формуле:

$$A^{s+1} = \lambda A^s \quad (6.6),$$

$$\text{где} \quad \lambda = (1 - \mu) + \mu \exp(-im\Delta r) \quad (6.7).$$

Множитель перехода λ является комплексным числом, и его модуль определяется выражением

$$|\lambda| = \sqrt{RE^2 + IM^2} \quad (6.8)$$

где RE – вещественная часть комплексного числа, а IM – комплексная часть.

После несложных математических преобразований получаем формулу:

$$|\lambda| = \sqrt{1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos m\Delta r)} \quad (6.9).$$

Проанализируем полученное выражение при различных значениях критерия линейной устойчивости μ . Если $\mu > 1$, то $|\lambda|$ также больше единицы, амплитуда растет от шага к шагу при любом значении шагов по времени и пространству. То есть, можно сказать, что решение неустойчиво.

При множителе перехода $|\lambda| < 1$ критерий устойчивости μ тоже должен быть меньше единицы. Только в этом случае схема становится устойчивой. После такого анализа следует сделать вывод об условной

устойчивости рассмотренной схемы. Если для конечно-разностной схемы $|\lambda|=1$, то данную схему называют нейтральной, если $|\lambda|<1$, то схема устойчива и диссипативна, в противном случае, то есть, если $|\lambda|>1$, схема будет неустойчивой. Например, схема с направленными разностями и по времени и по пространству

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_q^s}{\Delta r} = 0 \quad (6.10)$$

является абсолютно неустойчивой, так как

$$|\lambda| = \sqrt{1 + 2\mu(1 + \mu)(1 - \cos m\Delta r)} \quad (6.11)$$

при любых значениях критерия μ больше единицы.

В действительности, схемы направленных разностей по пространству аппроксимируют уравнение вида:

$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$, где ν - коэффициент вычислительной вязкости. Если $\nu > 0$, схема корректна, условно устойчива и диссипативна, в противном случае - абсолютно неустойчива. Для схемы (6.12)

$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{c(\Delta r - c\Delta t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$, коэффициент $\nu > 0$ при $c\Delta t / \Delta r \leq 1$, то есть при $\mu < 1$.

Для схемы (6.13)

$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{c(\Delta r - c\Delta t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$, коэффициент $\nu < 0$, поэтому схема абсолютно неустойчива. Счетная вязкость, так же как и физическая вязкость, способствует сглаживанию метеорологических полей.

Также абсолютно неустойчивой следует считать схему центральных разностей по пространству, записанную следующим образом:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} = 0 \quad (6.14)$$

Подставив в уравнение (6.14) точное решение (6.1) в нужных точках, а именно, в точках $(s, q), (s+1, q), (s, q+1), (s, q-1)$, и сократив на множитель $e^{imq\Delta r}$, получим амплитудное уравнение в виде:

$$A^{s+1} = A^s (1 - \mu / 2(e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r})) \quad (6.15)$$

Множитель переход λ равен:

$$\lambda = (1 - i\mu \sin(m\Delta r)) \quad (6.16)$$

При этом $|\lambda| = \sqrt{1 + \mu^2 \sin^2 m\Delta r}$, и при любых значениях критерия линейной устойчивости μ $|\lambda|$ всегда больше единицы. Иными словами, рассмотренная схема абсолютно неустойчива.

Исходя из выше изложенного, можно сделать вывод о том, что все рассмотренные схемы интегрирования по времени являются или абсолютно неустойчивыми, или условно устойчивыми.

Исследуем далее схемы интегрирования по времени, которые являются абсолютно устойчивыми или нейтральными.

Например,

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \mu(f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}) \quad (6.17).$$

Данная схема является **неявной по времени**, так в правой части уравнения (6.17) присутствуют неизвестные еще значения функции f в момент времени $(s+1)$.

Иследуем эту схему на устойчивость по методу Неймана.

Получим, как и в предыдущих случаях, амплитудное уравнение вида:

$$A^{s+1}(1 - i\mu \sin m\Delta r) = A^s \quad (6.18)$$

Для данного уравнения $|\lambda| = \sqrt{\frac{1}{1 + \mu^2 \sin^2 m\Delta r}}$ (6.19).

При любом значении критерия μ , $|\lambda|$ всегда меньше единицы. Следовательно, неявная схема является абсолютно устойчивой.

Неявная схема трапеций второго порядка точности $O(\Delta t^2, \Delta r^2)$ для линейного уравнения адвекции (5.1) записывается в виде:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \mu/4(f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}) - \mu/4(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s) \quad (6.20).$$

Эта схема называется схемой Кранка-Николсона. Она абсолютно устойчива и нейтральна, так как $|\lambda| = 1$. Докажем этот факт, исследуя данную схему по методу Неймана. Амплитудное уравнение запишем в виде:

$$A^{s+1}(1 - i\mu \sin m\Delta r) = A^s (1 + i\mu \sin m\Delta r) \quad (6.21)$$

Модуль перехода $|\lambda|$ равен:

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{1 + (\mu^2/4)\sin^2 m\Delta r}{1 - (\mu^2/4)\sin^2 m\Delta r}} = 1, \quad (6.22)$$

поэтому схема нейтральна и абсолютно устойчива при любых $\Delta t, \Delta r$.

Лекция 7

Методы интегрирования прогностических уравнений по времени. Вычислительные моды. Итерационные схемы.

Любое прогностическое уравнение или систему прогностических уравнений можно записать в общем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F(f) \quad (7.1), \quad \text{где } f \text{ — прогностическая}$$

переменная или вектор прогностических переменных, F — правая часть.

Методы интегрирования по времени можно условно разделить на три пересекающиеся группы:

1. по способу задания правой части (явные, неявные и полунявные)
2. по количеству временных уровней (двухуровневые и многоуровневые)
3. по количеству итераций (или тактов) (однотактные и итерационные).

В связи с этим, любую схему интегрирования по времени следует характеризовать по трем соответствующим признакам. Например, схема Кранка-Николсона является неявной, двухуровневой, однотактной, а схема Эйлера (направленные разности вперед) — явной, двухуровневой и однотактной.

Схема центральных разностей

Рассмотрим схему центральных разностей по времени. Запишем конечно-разностную аппроксимацию по данной схеме для уравнения (6.1) в виде

$$\frac{f^{s+1} - f^{s-1}}{2\Delta t} = F^s \quad (7.2).$$

Как видно из (6.2), данная схема - явная, трехуровневая и одноктактная. Она обладает вычислительными модами, то есть ложными решениями. Докажем данный факт на примере линейного уравнения адвекции. Схема центральных разностей является согласованной, второго порядка точности - $O[\Delta t^2, \Delta x^2]$, и для линейного уравнения адвекции $\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0$ имеет следующий вид:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^{s-1}}{2\Delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} = 0. \quad (7.3)$$

Подставляя в схему (6.3) точное решение и сокращая результат на множитель $e^{imq\Delta r}$, получим уравнение для амплитуд на трех временных шагах.

После несложных преобразований выводится формула для частоты колебаний $\sigma = mc$ вида

$\sigma = \frac{1}{\Delta t} \arcsin(-c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m\Delta r)$. При этом, частота колебаний будет вещественной, если $|-c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin mr| \leq 1$. Иными словами, схема является условной устойчивой, но не обладает вычислительной вязкостью.

Для множителя перехода λ возникает квадратное уравнение вида:

$$\lambda + 2i\omega\lambda - 1 = 0, \text{ где } \omega = c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin(m\Delta r).$$

Корни данного уравнения имеют вид:

$\lambda_1 = -i\omega + \sqrt{1 - \omega^2}$, $\lambda_2 = -i\omega - \sqrt{1 - \omega^2}$, (7.4). Этим значениям λ соответствуют два численных решения. Наличие двух численных решений для решения линейного дифференциального уравнения адвекции **первого порядка** является следствием **трехуровненности** конечно-разностной схемы. Следовательно, конечно-разностное решение, соответствующее λ_1 , стремится к точному. Оно называется физической модой. Другое же – вычислительной модой. Вычислительная мода представляет собой источник ошибок для численного решения и ее необходимо подавлять.

Итерационные схемы.

Согласованные двухтактные схемы Мацуно и Хойна являются первого порядка точности по времени и второго порядка точности по пространству. Схема Мацуно (или Эйлера с пересчетом) - условно устойчива при $\mu < 1$

(Следует напомнить, что $\mu = \frac{c\Delta t}{\Delta r}$ - критерий линейно устойчивости (критерий

Куранта-Фридрихса-Леви), а схема Хойна – хотя и абсолютно неустойчива, но при $\mu < 1$ неустойчивость слабая.

С помощью метода Неймана докажем эти два факта.

1. Запишем конечно-разностный аналог линейного уравнения адвекции по схеме Эйлера с пересчетом. (Ее еще называют «схема предиктор-корректор»)

Предиктор:

$$f_q^{(s+1)*} = f_q^s - 0.5\mu(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s) \quad (7.5)$$

Корректор

$$f_q^{(s+1)} = f_q^s - 0.5\mu(f_{q+1}^{(s+1)*} - f_{q-1}^{(s+1)*}) \quad (7.6).$$

Подставим в уравнения (7.5) и (7.6) точное решение $f_q^s = A^s e^{imq\Delta r}$ и сокращая на множитель $e^{imq\Delta r}$, находим уравнение для амплитуды:

$$A^{s+1} = A^s - 0.5\mu(A^s - 0.5\mu A^s (e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r}))(e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r}). \quad (7.7)$$

По формуле Эйлера $(e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r}) = 2i \sin(m\Delta r)$. Поэтому

$$|\lambda| = \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 m\Delta r + \mu^4 \sin^4 m\Delta r} \quad (7.8) \text{ и при } \mu < 1 \quad |\lambda| < 1.$$

Схема Эйлера с пересчетом обладает вычислительной вязкостью.

2. Схеме Хойна не обладает вычислительной вязкостью и слабо неустойчива при $\mu < 1$.

Запишем конечно-разностный аналог линейного уравнения адвекции по схеме Хойна для линейного уравнения адвекции:

Первый такт:

$$f_q^{(s+1)*} = f_q^s - 0.5\mu(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s) \quad (7.9)$$

Второй такт:

$$f_q^{(s+1)} = f_q^s - 0.25\mu(f_{q+1}^{(s+1)*} - f_{q-1}^{(s+1)*}) - 0.25\mu(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s) \quad (7.10).$$

Подставим в уравнение (6.10) уравнение (6.9). Получим:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - 0.25\mu((f_{q+1}^s - 0.5\mu f_{q+2}^s + 0.5\mu f_q^s - f_{q-1}^s + 0.5\mu f_q^s - 0.5\mu f_{q-2}^s) - 0.25\mu f_{q+1}^s + 0.25\mu f_{q-1}^s)$$

и приведем подобные. Тогда получается следующее уравнение:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - 0.5\mu f_{q+1}^s + 0.5\mu f_{q-1}^s + 0.125\mu^2 f_{q+2}^s - 0.25\mu^2 f_q^s + 0.125\mu^2 f_{q-2}^s \quad (7.11).$$

Подставим в уравнения (7.11) точное решение $f_q^s = A^s e^{imq\Delta r}$ и сокращая на множитель $e^{imq\Delta r}$, находим уравнение для амплитуды:

$$A^{s+1} = A^s (1 - i\mu \sin m\Delta r + 0.25\mu^2 \cos 2m\Delta r - 0.25\mu^2) \quad (7.12).$$

Можно заменить $\cos 2m\Delta r = \cos^2 m\Delta r - \sin^2 m\Delta r$. В этом случае

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \frac{\mu^4}{4} \sin^4 m\Delta r} \quad (7.13)$$

При $\mu < 1$ данная схема является очень слабо неустойчивой.

Лекция 8

Схема Лакса - Вендрофа.

Анализ фазовых и групповых скоростей конечно-разностных решений для линейного уравнения адвекции. Вычислительная дисперсия.

Рассмотрим схема Лакса - Вендрофа для линейного уравнения адвекции. Данная схема является явной, двухуровневой, второго порядка точности по пространству. Она обладает вычислительной вязкостью при $\mu > 1$.

В данной схеме используются так называемые сетки с дробными индексами.

Поясним это на схеме.

| | | |
|--|-------|--|
| | | |
| | S+1,q | |

| | | |
|-------------|-----|-------------|
| s+0,5,q-0,5 | | s+0,5,q+0,5 |
| s,q-0,5 | s,q | s,q+0,5 |

Рис. 8.1. Расположение узлов для схемы Лакса- Вендрофа.

Получаем значения прогностической функции в момент времени $S+0,5$ в точках $q+0,5$ и $q-0,5$, а затем – в момент времени $s+1$ в точках с целыми индексами, то есть:

$$\frac{f_{q+0,5}^{s+0,5} - 0,5(f_{q+1}^s + f_q^s)}{\Delta t / 2} = -c \frac{(f_{q+1}^s - f_q^s)}{\Delta r} \quad (8.1)$$

$$\frac{f_{q-0,5}^{s+0,5} - 0,5(f_q^s + f_{q-1}^s)}{\Delta t / 2} = -c \frac{(f_q^s - f_{q-1}^s)}{\Delta r}$$

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} = -c \frac{(f_{q+0,5}^{s+0,5} - f_{q-0,5}^{s+0,5})}{\Delta r} \quad (8.2)$$

Получим рабочую формулу схемы Лакса – Вендрофа на основании (8.1) и (8.2).

Для этого решим уравнение (8.1) относительно $f_{q+0,5}^{s+0,5}$, а уравнение (8.2) - относительно $f_{q-0,5}^{s+0,5}$. Тогда получим

$$f_{q+0,5}^{s+0,5} = 0,5(f_{q+1}^s + f_q^s) - \frac{c0,5\Delta t}{\Delta r} (f_{q+1}^s - f_q^s) \quad (8.3)$$

$$f_{q-0,5}^{s+0,5} = 0,5(f_q^s + f_{q-1}^s) - \frac{c0,5\Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) \quad (8.4)$$

Подставим (7.3) и (7.4) и приведем подобные:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - 0,5\mu f_{q+1}^s + 0,5\mu^2 f_{q+1}^s + 0,5\mu f_{q-1}^s - \mu^2 f_{q-1}^s + 0,5\mu^2 f_{q-1}^s \quad (8.5)$$

Применим метод Неймана для определения устойчивости схемы Лакса-Вендрофа. Для этого подставим точное решение в (8.5) и сократим на решение $e^{imq\Delta r}$:

$$A^{s+1} = A^s (1 - i\mu \sin m\Delta r - \mu^2 + \mu^2 \cos m\Delta r) \quad (8.6)$$

Поскольку $\cos m\Delta r = \cos^2(\frac{m\Delta r}{2}) - \sin^2(m\Delta r / 2) = 1 - 2\sin^2(m\Delta r / 2)$, а

$\sin m\Delta r = 2\sin(m\Delta r / 2)\cos(m\Delta r / 2)$, то множитель перехода λ равен

$$\lambda = 1 + \mu^2 - 2\mu^2 \sin^2(m\Delta r / 2) - \mu^2 - i\mu \sin m\Delta r \quad (8.7),$$

$$\text{а } |\lambda| = \sqrt{1 - 4\mu^2 \sin^2(m\Delta r / 2) + 4\mu^4 \sin^4(m\Delta r / 2) + 4\mu^2 \sin^2(m\Delta r / 2) \cos^2(m\Delta r / 2)} \quad (7.8).$$

После несложных преобразований получаем окончательную формулу для модуля множителя перехода λ :

$$|\lambda| = \sqrt{1 - 4\mu^2 \sin^4(m\Delta r / 2)(1 - \mu^2)} \quad (8.9).$$

При $(1 - \mu^2) \geq 0$ $|\lambda| \leq 1$. Следовательно, условие устойчивости можно записать в виде $\mu \leq 1$. Как мы видим, схема Лакса-Вендрофа диссипативна. Можно также отметить, что диссипативность схемы уменьшается при увеличении длины волны.

Анализ фазовых и групповых скоростей конечно-разностных решений для линейного уравнения адвекции. Вычислительная дисперсия.

Любое прогностическое уравнение или систему прогностических уравнений можно записать в общем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F(f) \quad (8.10),$$

где f – прогностическая переменная или вектор прогностических переменных, F – правая часть.

В линейном уравнении адвекции правая часть представляет собой соотношение

$$F = -c \frac{\partial f}{\partial r} \quad (8.11).$$

При этом, $\frac{dA}{dt} + imcA = 0$, так как решение линейного уравнения имеет вид

$f(t, r) = A(t)e^{imr}$, где $A(t) = A_0 e^{-imct}$, а $mc = \sigma$. Под σ мы понимаем частоту колебаний, а c – фазовая скорость волны.

В точном решении фазовая скорость волны и групповая скорость волны равны скорости переноса.

(Напомним, что под групповой скоростью мы понимаем скорость распространения волн с близкими волновыми числами с максимальной амплитудой. Групповая скорость определяет скорость переноса энергии по спектру).

Оценим фазовую и групповую скорости конечно-разностных решений уравнения (7.1) с правой частью (8.12).

Подставим в схему центральных разностей

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{2\Delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} = 0 \quad (8.13)$$

точное решение и получим соотношение для фазовой скорости

$$C_\phi = \frac{\sigma}{m} = \frac{1}{m\Delta t} \arcsin\left(c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin(m\Delta r)\right) \quad (8.14).$$

При $\mu = c \frac{\Delta t}{\Delta r} = 1$ фазовая скорость $C_\phi = \frac{m\Delta r}{m\Delta t} = \frac{\Delta t}{\Delta r} = c$. Таким

образом, в этом случае фазовая скорость конечно-разностного решения равна истинной фазовой скорости. Как известно из предыдущей лекции, для

обеспечения устойчивости схемы центральных разностей $\mu = c \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1$.

Разложим в ряды функции $\sin(m\Delta r)$ и $\arcsin\left(c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m\Delta r\right)$. Тогда получим, что

$$\sin(m\Delta r) \approx m\Delta r - \frac{(m\Delta r)^3}{6} + \dots, \quad (8.15), \text{ а}$$

$$\arcsin\left(c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m\Delta r\right) \approx c \frac{\Delta t}{\Delta r} + \frac{1}{6} \left(c \frac{\Delta t}{\Delta r}\right)^3 \sin(m\Delta r) + \dots \quad (8.16).$$

Подставляя (8.15) и (8.16) в (8.14) получаем следующую формулу:

$$\frac{C_\phi}{c} \approx 1 - \frac{1}{6} \left[1 - \left(\tilde{n} \frac{\Delta t}{\Delta r}\right)^2\right] (m\Delta r)^2 \quad (8.17)$$

Для обеспечения устойчивости схемы центральных разностей $\mu = c \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1$.

Из выражения (8.17) следует, что фазовая скорость конечного разностного решения за счет конечной разности **по времени** (член в квадратных скобках).

ЗАВЫШАЕТСЯ, а за счет конечной разности **по пространству** – $(m\Delta r)$ - **ЗАНИЖАЕТСЯ**.

Из последнего вывода следует, **что фазовая скорость численного решения зависит от длины волны (волнового числа)**.

Оценим влияние на фазовую скорость только конечно-разностной аппроксимации производной по пространству. Для этого запишем линейное уравнение адвекции в дифференциально-разностном (полудискретном) виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{f_{q+1} - f_{q-1}}{2\Delta r} = 0 \quad (8.18)$$

Подставляя в это уравнение точное решение в полудискретном виде $f_q(t) = A_0 e^{im(q\Delta r - ct)}$ получим, что фазовая скорость при конечно-разностной аппроксимации центральными разностями не константа, а зависит от длины волны и шага сетки:

$$c_{\text{о.д.}} = c \frac{\sin(m\Delta r)}{m\Delta r} \quad (8.19)$$

Анализ этого выражения показывает, что по мере увеличения волнового числа (уменьшения длины волны) фазовая скорость уменьшается, а при длине волны $L = 2\Delta r$, то есть при $m\Delta r = \pi$, становится равной нулю.

Таким образом, занижение фазовых скоростей при уменьшении длины при конечно-разностной аппроксимации по пространству называется **вычислительной дисперсией**. Вычислительная дисперсия, наряду с искажением амплитуды возмущений, является дополнительным источником ошибок.

Что касается групповой скорости, которая характеризует скорость переноса энергии, то ее искажение при конечно-разностной аппроксимации еще более существенное.

Для точного решения имеем, что групповая скорость равно

$$c_{\vec{A}} = \frac{dmc}{dm} = c, \text{ то есть скорости переноса. При конечно-разностной}$$

аппроксимации групповая скорость уменьшается даже до отрицательных значений при длинах волн, равных двум шагам сетки, и равняется нулю для четырехшаговых волн. **Таким образом, энергия волн с длинами $L = 2\Delta r$ и**

$L = 4\Delta r$ может распространяться против потока, искажая процесс переноса энергии.

Лекция №9

Вывод уравнения вихря скорости. Баротропное уравнение вихря.

Баротропная квазигеострофическая модель.

Квазигеострофические модели относятся к классу «фильтрованных» моделей, имеющих ряд существенных ограничений, главное из которых – **предположение о близости ветра в свободной атмосфере к геострофическому**.

Прогнозы по этим моделям не столь точны, но они допускают достаточно ясную синоптическую интерпретацию и качественный анализ факторов, определяющих эволюцию метеорологических полей. На основе

таких моделей были построены первые гидродинамические оперативные прогностических схемы.

В квазигеострофических моделях одним из основных прогностических уравнений является уравнение вихря скорости. Выведем данное уравнение и проанализируем его.

Уравнение для вертикальной составляющей вихря скорости в изобарической системе координат

$$\Omega = \Omega_p = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (9.1)$$

получается на основе уравнений движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \quad (9.1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lv \quad (9.1.2)$$

Дифференцируя уравнение (9.1.1) по x , а (9.1.2) – по y и вычитая второе из первого, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Omega}{\partial p} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} = \\ -(\Omega + l) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - u \frac{\partial l}{\partial x} - v \frac{\partial l}{\partial y} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Сохраняя в последнем уравнении только главные слагаемые, находим:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = -l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - u \frac{\partial l}{\partial x} - v \frac{\partial l}{\partial y} \quad (9.3), \text{ или}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial(\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial(\Omega + l)}{\partial y} = -l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (9.4).$$

Из уравнения неразрывности можно получить, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \tau}{\partial p} \quad (9.5)$$

С учетом (9.5) имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial(\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial(\Omega + l)}{\partial y} = l \frac{\partial \tau}{\partial p} \quad (9.6)$$

Представим далее скорость фактического ветра в виде суммы скорости геострофического ветра и отклонения ветра от геострофического:

$$u = u_g + u'_g; \quad (9.7)$$

$$v = v_g + v'_g; \quad (9.8).$$

Геострофический ветер связан с геопотенциалом следующими соотношениями:

$$u_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, v_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (9.9)$$

В уравнениях (9.7), (9.8) и (9.9) Φ – геопотенциал изобарической поверхности, и $\Phi = gh$, где h – геопотенциальная высота в метрах, u_g, v_g – составляющие вектора ветра, а u'_g и v'_g – агеострофические отклонения, близкие к нулю.

Вертикальную составляющую вихря Ω можно в первом приближении представить в виде $\Omega \approx \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi$ (9.10),

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - двумерный оператор Лапласа (Лапласиан).

(Обратите внимание на то, что в крупномасштабных движениях вертикальная составляющая вихря скорости на порядок больше его горизонтальных составляющих)

(Из уравнения (9.10) видно, на экваторе геострофическое приближение использовать нельзя! На экваторе и вблизи него параметр Кориолиса равен нулю, так как широта места равно нулю, и параметр Кориолиса $l = 2\omega \sin \varphi$, где ω - угловая скорость вращения Земли, равная $7.29 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$ равен нулю.)

Анализ поля вертикальных скоростей показывает, что вблизи земной поверхности и на верхней границе атмосферы τ можно считать равной нулю.

Поэтому в средней тропосфере, приблизительно вблизи поверхности 500 гПа, $\tau = \text{max}$,

$$\text{поэтому } \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0.$$

Это уровень в атмосфере называют баротропно эквивалентным. На этом уровне уравнение (9.6) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \Omega_g}{\partial t} + u \frac{\partial(\Omega_g + l)}{\partial x} + v \frac{\partial(\Omega_g + l)}{\partial y} = 0. \quad (9.11), \quad \text{где}$$

$$\Omega_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi \quad (9.12).$$

В уравнении (9.11) - Φ - геопотенциал поверхности 500 гПа.

Подставляя геострофические соотношения (9.9) и соотношение (9.12) в (9.11), получаем еще один вид уравнения вихря скорости в геострофическом приближении:

$$\nabla^2 q = J\left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi + l, \Phi\right) \quad (9.13).$$

В (9.13) введены следующие обозначения:

$q = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ - тенденция геопотенциала поверхности 500 гПа,

$J\left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi + l, \Phi\right)$ - якобиан. Этот оператор является нелинейным дифференциальным оператором, который имеет вид:

$$J\left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi + l, \Phi\right) = \frac{\partial\left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi + l\right)}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi + l\right)}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (9.14),$$

и представляет собой геострофическую адвекцию абсолютного вихря скорости.

Физический смысл баротропного уравнения вихря скорости состоит в том, что локальное изменение вихря скорости зависит только от адвекции абсолютного вихря.

Еще одно толкование уравнений (9.13) или, если хотите - (9.11) -

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ АБСОЛЮТНОГО ВИХРЯ СКОРОСТИ. То есть, абсолютный вихрь – инвариант, его полная производная по времени $\frac{d\Omega_g}{dt} = 0$.

Уравнение (9.13) по отношению к тенденции геопотенциала является линейным уравнением второго порядка – уравнением Пуассона и имеет точное решение. Но мы будем его решать методом сеток при определенной постановке граничных условий.

Решив данное уравнение относительно тенденции геопотенциала $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, можно методом шагов по времени рассчитать и прогностические значения геопотенциала, например, по явной схеме Эйлера:

$$\Phi^{s+1} = \Phi^s + \Delta t q \quad (9.12),$$

во всех точках пространства, кроме двух границ, на которых ставятся граничные условия.

Лекция №10

Бароклинные квазигеострофические модели. Методы численного интегрирования квазигеострофических моделей.

Квазигеострофические модели относятся к классу «фильтрованных» моделей, имеющих ряд существенных ограничений, главное из которых – **предположение о близости ветра в свободной атмосфере к геострофическому.**

Прогнозы по этим моделям не столь точны, но они допускают достаточно ясную синоптическую интерпретацию и качественный анализ факторов, определяющих эволюцию метеорологических полей. На основе таких моделей были построены первые гидродинамические оперативные прогностические схемы.

Однако двумерные (баротропные) квазигеострофические модели описывали весьма приближенно процессы, происходящие в свободной атмосфере. Поэтому в середине 60-х годов были **разработаны бароклинные (трехмерные) квазигеострофические прогностические схемы**, в частности, модель Булеева – Марчука (1961 год).

В качестве исходной системы принималась следующая система уравнений:

1. Уравнение вихря, записанное для тенденции геопотенциала q в виде

$$\nabla^2 q - l \frac{\partial \tau}{\partial p} = J\left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi + l, \Phi\right) \quad (10.1),$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - двумерный оператор Лапласа (Лапласиан),

$q = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ - тенденция геопотенциала, $J\left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi + l, \Phi\right)$ - Якобиан.

2. Уравнение притока тепла в адиабатическом приближении

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT(\gamma_a - \gamma)}{gp} \tau = 0 \quad (10.2)$$

3. Уравнение статики атмосферы:

$$T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \quad (10.3)$$

Все обозначения были определены в предыдущих лекциях.

(Напомним еще раз, что геострофический ветер связан с геопотенциалом следующими соотношениями:

$$u_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, v_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (10.4)$$

Данная система уравнений является замкнутой и позволяет прогнозировать следующие величины:

1. **Геопотенциал изобарических поверхностей** $\Phi = gh$, где h – геопотенциальная высота изобарической поверхности в метрах.
2. **Температуру воздуха на изобарических поверхностях** T .
3. **Аналог вертикальной скорости** τ .

Бароклинная квазигеострофическая модель является трехмерной моделью, поэтому прогнозирование может осуществляться на основных изобарических поверхностях и по желанию разработчика модели. В частности, модель Булеева-Марчука была трехуровневой. Для реализации бароклинной квазигеострофической модели необходимо поставить начальные и граничные условия для всех прогнозируемых величин. Обратим внимание на то, что возникает проблема постановки граничных условий по вертикали в изобарической системе координат. При определенных условиях данную систему уравнений можно решать как точно, так и приближенно (то есть, конечно-разностным методом).

Методы численного интегрирования квазигеострофических моделей.

Рассмотрим некоторые наиболее употребляемые итерационные методы решения конечно-разностного баротропного уравнения вихря, как уравнения Пуассона, которое имеет вид : (см. лекцию 9, уравнение 9.13)

$$\nabla^2 q = J\left(\frac{1}{f} \nabla^2 \Phi + l, \Phi\right) \quad (10.5)$$

Данное уравнение относительно тенденции геопотенциала $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ является линейным уравнением второго порядка.

Остановимся подробнее на конечно-разностной аппроксимации операторов Лапласа и Якоби (соответственно, Лапласиана и Якобиана).

Применим конечно-разностную аппроксимацию уравнения (10.5). Для этого непрерывное пространство D заменим конечно мерным сеточным

пространством, а именно

$$x = i\Delta x, y = j\Delta y$$

где $\Delta x, \Delta y$ – шаги сетки, причем можно считать, что $\Delta x = \Delta y = r$.

Представим данную сеточную область на рисунке (см. рис. 10.1)

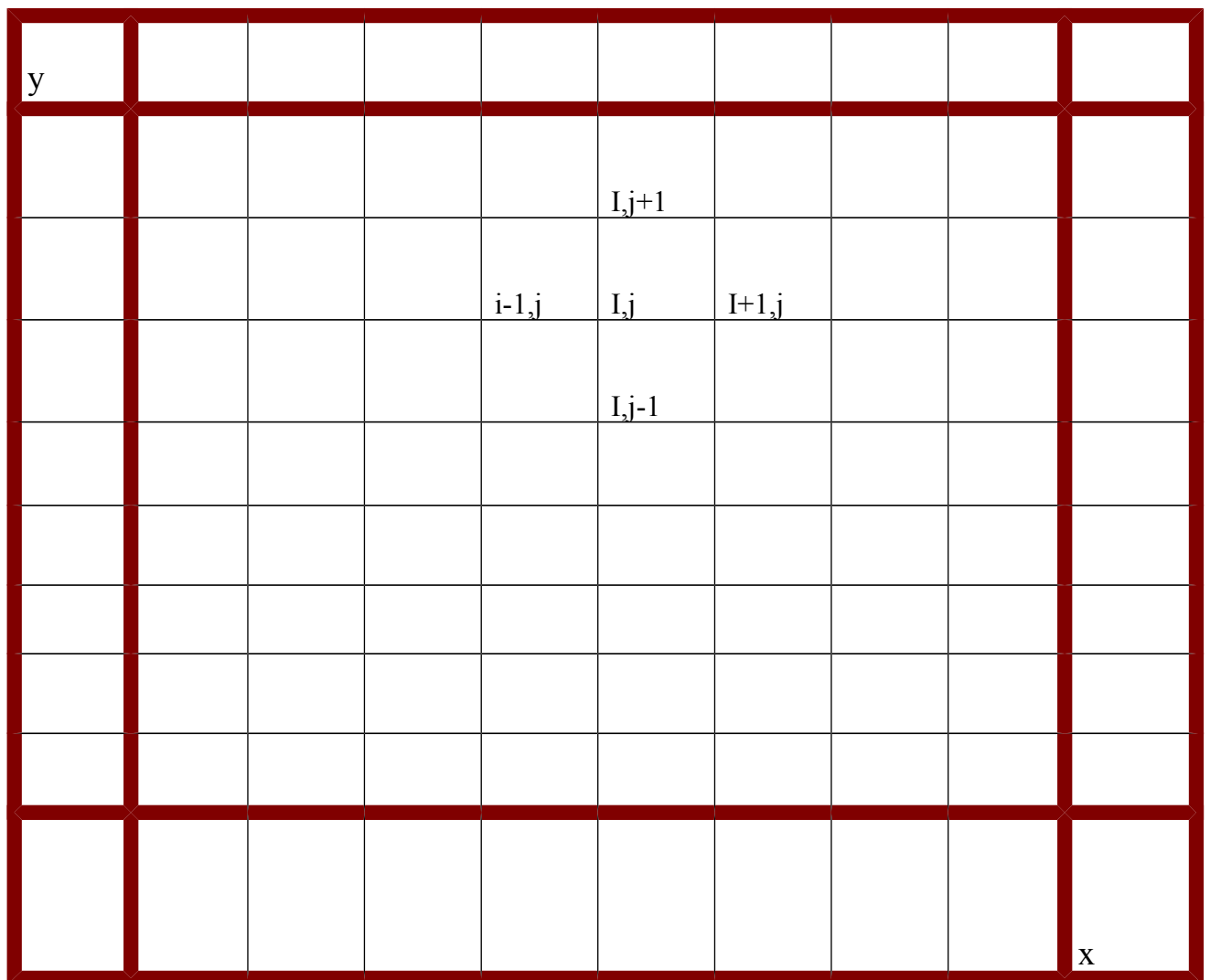


Рис.10.1

$i=1, \dots, N, j=1, \dots, M$, где N и M – количество узлов соответственно по оси x и y .

Запишем конечно-разностный аналог уравнения (10.5)

$$\frac{1}{r^2}(q_{i,j+1} + q_{i,j-1} + q_{i-1,j} + q_{i+1,j} - 4q_{i,j}) = f_{i,j} \quad (10.6), \text{ где}$$

$$f_{i,j} = J\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l, \Phi\right) \quad (10.7).$$

Видно, что конечно-разностный аналог Лапласиана записывается, как

$$\nabla^2 q = \frac{1}{r^2}(q_{i,j+1} + q_{i,j-1} + q_{i-1,j} + q_{i+1,j} - 4q_{i,j})$$

Можно доказать, что при аппроксимации Лапласиана используется аппроксимация **второго порядка** точности.

Разложив $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}$ в окрестности точки i, j в ряд Тейлора, получим ошибку

аппроксимации вида

$$\varepsilon = \frac{\partial^4 q}{\partial x^4} \frac{r^2}{12} + \frac{\partial^4 q}{\partial y^4} \frac{r^2}{12} \quad (10.8). \quad (\text{Проделать при}$$

желании самостоятельно)

Якобиан (оператор Якоби), который имеет вид

$J\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l, \Phi\right)$, можно аппроксимировать следующим образом:

$$\tilde{J}(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} \approx \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2r} \frac{B_{i,j+1} - B_{i,j-1}}{2r} - \frac{B_{i+1,j} - B_{i-1,j}}{2r} \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2r}$$

(10.9), где

$$A = \frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l, \quad \text{а } B = \Phi.$$

(Следует отметить еще раз, что в данной прогностической модели Якобиан характеризует геострофическую адвекцию абсолютного вихря скорости.)

Система уравнений (10.6) является системой линейных алгебраических уравнений, которую при задании граничных условий будем решать итерационными методами.

Рассмотрим два итерационных метода решения системы уравнений (10.6) – простые итерации по Ричардсону и экстраполированный метод Либмана. Последний сходится быстрее, чем метод Ричардсона, так в нем используются значения из последующей итерации. На самом деле, **любой итерационный процесс состоит всегда из трех обязательных пунктов.**

1. Задание начального приближения .
2. Вычисление последующей итерации.

3. Прекращение итерационного процесса, если две соседние итерации отличаются друг от друга по модулю на величину, равную или меньшую, чем точность расчетов. (Чаще всего, точность = 10^{-3} или 10^{-4})

Метод Ричардсона

1. Задание начального приближения

$q^{v=0} = 0$ во всех точках прогностического поля ($i=1 \dots N, j=1 \dots M$).
 v - номер итерации.

2. Расчет последующей итерации по формуле

$$q^{v+1}_{i,j} = (q^v_{i+1,j} + q^v_{i-1,j} + q^v_{i+1,j} + q^v_{i-1,j} - r^2 f_{i,j}) \frac{1}{4}$$

3. Расчет $\max_{i,j} |q^{v+1}_{i,j} - q^v_{i,j}|$, то есть максимума модуля разницы между двумя соседними итерациями. Если $\max_{i,j} |q^{v+1}_{i,j} - q^v_{i,j}| \leq \delta$, (δ - точность), то можно считать, что $q^{v+1}_{i,j}$ - решение уравнения Пуассона. В противном случае, считаем следующую итерацию, то есть $v = v + 1$ и переход на пункт 2.

Метод Ричардсона сходится достаточно медленно. Для получения решения необходимо 9-11 итераций. Более быстрым считается экстраполированный метод Либмана, основанный на методе релаксаций.

Метод Либмана.

Как и в любом методе, построенном на итерационной процедуре, в этом методе присутствуют тоже три пункта, а именно

1. Задание начального приближения.
2. Вычисление последующей итерации.
3. Прекращение итерационного процесса, если две соседние итерации отличаются друг от друга по модулю на величину, равную или меньшую, чем точность расчетов. (чаще всего, точность = 10^{-3} или 10^{-4}).
 Как и в методе Ричардсона определим все три пункта.

1. Задание начального приближения

$q^{v=0} = 0$ во всех точках прогностического поля ($i=1 \dots N, j=1 \dots M$).
 v - номер итерации.

2. Расчет последующей итерации с помощью двух формул.

Сначала рассчитываем невязку между левой и правой частью уравнения (10.6) :

$$R_{i,j}^{v,v+1} = q_{i-1,j}^{v+1} + q_{i+1,j}^v + q_{i,j-1}^{v+1} + q_{i,j+1}^v - 4q_{i,j}^v - r^2 f_{i,j},$$

а затем определяем последующую итерацию по формуле

$$q_{i,j}^{v+1} = q_{i,j}^v + \alpha R_{i,j}^{v,v+1}, \text{ где } \alpha - \text{коэффициент релаксации, который}$$

определяется эмпирическим путем, и принимает значения меньше 1, но больше 0. Чаще всего коэффициент релаксации равен 0.5 – 0.7.

3. Расчет $\max_{i,j} |q^{v+1}_{i,j} - q^v_{i,j}|$, то есть максимума модуля разницы между двумя соседними итерациями. Если $\max_{i,j} |q^{v+1}_{i,j} - q^v_{i,j}| \leq \delta$, (δ - точность), то можно считать, что $q^{v+1}_{i,j}$ - решение уравнения

Пуассона. В противном случае, считаем следующую итерацию, то есть $\nu = \nu + 1$ и переход на пункт 2.

Обратим внимание на то, что в данном методе при расчете последующей итерации ($\nu + 1$) используются значения искомой функции на итерации $\nu + 1$ в точках $i - 1, j$ и в точках $i, j - 1$. Поэтому метод Либмана сходится быстрее, чем метод Ричардсона.

Необходимо отметить, что при решении уравнения Пуассона задаются граничные условия на двух внешних границах Γ_1 и Γ_2 . (см. рис. 10.1).

Границы отмечены красным цветом. Поэтому значение $q_{i,j} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ на первом и последующих временных шагах определяется только во внутренних точках области прогноза, а именно, для точек $i = 3 \dots N - 2, j = 3 \dots M - 2$. На двух границах значения $q_{i,j} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ задается равным 0. **Иными словами, на границах области прогноза значения геопотенциала за все время прогноза не меняется!!**

Лекция № 11

Анализ конечно-разностных схем для уравнений, описывающих

внешние гравитационные и инерционно-гравитационные волны.

Модель «мелкой воды». Расшатанные сетки.

Так как полные уравнения описывают не только низкочастотные, но и быстрые волновые процессы, то конечно-разностные схемы для этих уравнений должны правильно воспроизводить волновые процессы более мелких масштабов. **К таким волнам относятся гравитационные и инерционно-гравитационные волны. Эти волны возбуждаются при локальном нарушении квазигеострофического равновесия, а рассеяние их в пространстве приводит к восстановлению геострофического равновесия.**

Рассмотрим систему из двух одномерных уравнений, которые описывают одномерную гравитационную волну:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\Phi \frac{\partial u}{\partial x}$$

Эти уравнения описывают поведение внешних гравитационных волн. Точное решение для фазовой скорости этих волн имеет вид:

$$C_\Phi = \pm \sqrt{\Phi}, \quad (11.2)$$

Анализируя это уравнение, можно сказать, что **фазовая скорость волны постоянна и волна может перемещаться как с востока на запад, так и с запада на восток.**

Дифференциально-разностный аналог системы уравнений (11.1) имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\Phi_{q+1}^s - \Phi_{q-1}^s}{2\Delta x} \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\overline{\Phi} \frac{u_{q+1}^s - u_{q-1}^s}{2\Delta x}$$

Обратим внимание на то, что производные по времени мы сохранили в «непрерывном» виде. Подставим в (11.3) точное решение и проанализируем поведение фазовой скорости при конечно-разностной аппроксимации производных по пространству. Точное решение имеет вид:

$$\begin{aligned} u(t, q\Delta x) &= A_u \exp(im(q\Delta x - ct)) \\ \Phi(t, q\Delta x) &= A_\Phi \exp(im(q\Delta x - ct)) \end{aligned} \quad (11.4)$$

Подставляя (11.4) в (11.3) получим:

$$-imcA_u \exp(im(q\Delta x - ct)) = -\frac{A_\Phi}{2\Delta x} (\exp(im(q+1)\Delta x) - \exp(im(q-1)\Delta x))$$

$$-imcA_\Phi \exp(im(q\Delta x - ct)) = -\overline{\Phi} \frac{A_u}{2\Delta x} (\exp(im(q+1)\Delta x) - \exp(im(q-1)\Delta x))$$

Разделив на $\exp(im(q\Delta x - ct))$ и вспомнив, что $\exp(im\Delta x) - \exp(-im\Delta x) = 2i \sin(m\Delta x)$ получим систему уравнений для амплитуд колебаний:

$$mcA_u = -\frac{A_\Phi}{\Delta x} \sin(m\Delta x) \quad (11.5)$$

$$mcA_\Phi = -\overline{\Phi} \frac{A_u}{\Delta x} \sin(m\Delta x)$$

Из системы уравнений (11.5) получаем формулу для фазовой скорости одномерной гравитационной волны при конечно-разностной аппроксимации центральными разностями:

$$\hat{C}_\Phi = \pm \sqrt{\overline{\Phi}} \frac{\sin(m\Delta x)}{m\Delta x} \quad (11.6).$$

Оказывается, что фазовая скорость волны при конечно-разностной аппроксимации **не константа, а зависит от длины волны и шага сетки!!**

При уменьшении для волны (при сохранении постоянным шаг сетки) фазовая скорость уменьшается, а для двухшаговых волн фазовая скорость вообще равна нулю.

Этот эффект называется ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ ВОЛН-искажение фазовой и групповой скорости при конечно-разностной аппроксимации.

Для более детального описания волн различных масштабов используются расшатанные сетки. **В расшатанных сетках разные переменные располагаются в различных узлах.** Например, построим конечно-разностный аналог системы уравнений (11.3) на расшатанной сетки Аракавы:

$$u_{q-1,5} \quad \Phi_{q-1} \quad u_{q-1/2} \quad \Phi_q \quad u_{q+1/2} \quad \Phi_{q+1} \quad u_{q+1,5}$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{q+1/2} = -\frac{\Phi_{q+1} - \Phi_{q-1}}{\Delta x} \quad (11.7)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_q = -\overline{\Phi} \frac{u_{q+1/2} - u_{q-1/2}}{2\Delta x}$$

Обратим внимание на то, что при таком расположении узлов шаг сетки фактически уменьшается вдвое. Тем самым, двухшаговые волны превращаются в четырехшаговые, которые уже лучше представляются на сетках. Значения в узлах в дробными индексами можно получить путем осреднения.

Особенности системы уравнений мелкой воды.

Рассмотрим тонкий слой однородной **идеальной** жидкости ($\rho = const$), ограниченной снизу горизонтальной поверхностью $z=0$, а сверху – свободной поверхностью высотой $h(x, y, t) = \frac{\Phi(x, y, t)}{g}$, где $\Phi(x, y, t)$ - геопотенциал **любой** изобарической поверхности. Выше данной поверхности расположена среда с **очень малой плотностью**, так что на **свободной поверхности** $\rho = \rho_0 = const$. Так как $\rho = const$, то из уравнения статики атмосферы следует, что

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho g) = \frac{\partial}{\partial y} (\rho g) = 0 \quad (11.8)$$

Следовательно, составляющие геострофического ветра не меняются с высотой:

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{\partial v_g}{\partial z} = 0. \quad (11.9)$$

Так как ветер в свободной атмосфере действительно близок к геострофическому, то можно в первом приближении предположить, что и составляющие реального ветра не меняются с высотой, а именно:

$$\frac{\partial u}{\partial z} \approx \frac{\partial v}{\partial z} \approx 0. \quad (11.10)$$

Проинтегрируем уравнение статики по z до h и учтем что при $z = h, \rho = \rho_0 = const$. При этом получим: $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = g \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s}$, считая, что $s = x, y$.

Таким образом, для рассматриваемой среды («мелкой воды») приобретают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv \quad (11.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu \quad (11.12)$$

Интегрируя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (11.13)$$

в пределах от 0 до h (с учетом неизменности составляющих скорости ветра по высоте и равенстве 0 вертикальной скорости w при $z = 0$,

получим

$$w_{z=h} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (11.14)$$

Принимаю во внимание то, что

$$w_{z=h} = \frac{dh}{dt} \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \quad (11.15)$$

Запишем уравнение для тенденции геопотенциала следующим образом

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (11.16).$$

В конечном итоге, система уравнений мелкой воды имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv \quad (11.17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu \quad (11.18)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (11.19)$$

Систему уравнений (11.17) – (11.19) можно интерпретировать, как **баротропную негеострофическую модель!!** На основе этих уравнений можно, опираясь на конечно-разностный метод, прогнозировать скорость ветра и геопотенциальную высоту шагами по времени для какой-то одной изобарической поверхности.

При этом необходимо задать начальные условия $(u^{t_0}, v^{t_0}, \Phi^{t_0})$ и граничные условия (например, $\frac{\partial h}{\partial t_{\Gamma}} = \frac{\partial u}{\partial t_{\Gamma}} = \frac{\partial v}{\partial t_{\Gamma}} = 0$).

1. Интегральные свойства модели мелкой воды.

При конечно-разностной аппроксимации и построении схем численного интегрирования полных уравнений руководствуются целым рядом соображений. Одно из них заключается в том, что системы конечно-разностных уравнений, называемые численными моделями, должны сохранять интегральные свойства соответствующих систем дифференциальных уравнений, т. е. математической модели. Иногда, особенно при краткосрочном прогнозировании, это требование может ослабляться или вообще не учитываться.

Рассмотрим подробнее интегральные свойства системы уравнений мелкой воды. (см. уравнения (11.17-11.19)). Будем считать, что область определения решения представляет собой прямоугольник с осями x, y . Область определения решения будем называть D . Длина сторон прямоугольника составляет $x_2 - x_1, y_2 - y_1$. На границах области поставим условия

$u_{x=x_1, x=x_2} = v_{y=y_1, y=y_2} = 0$, означающие, что через боковые границы нет потока массы!!.

Проинтегрируем уравнение $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$ в пределах области определения функции. Предварительно запишем его в так называемой **дивергентной форме**, а именно:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial (u\Phi)}{\partial x} + v \frac{\partial (v\Phi)}{\partial y} = 0. \quad (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_D \Phi dx dy = - \iint_D \frac{\partial}{\partial x} (u\Phi) dx dy - \iint_D \frac{\partial}{\partial y} (v\Phi) dx dy \quad (11.20)$$

Из граничных условий следует, что интегралы в правой части уравнения (11.13) равны 0. Таким образом

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_D \Phi dx dy = 0, \text{ что означает, что } \iint_D \Phi dx dy = const. \quad (11.21)$$

Следовательно, величина, стоящая в левой части выражения (11.21), является интегральным инвариантом модели мелкой воды.

Условие (11.21) означает **СОХРАНЕНИЕ МАССЫ, ЗАКЛЮЧЕННОЙ В ОБЪЕМЕ** $V = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)h$.

Для системы уравнений мелкой воды существует еще **энергетический инвариант и интегральная потенциальная энтропия (квадрат завихренности).**

Получим уравнение для кинетической энергии единицы массы

$$E = \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

Уравнение для кинетической энергии является следствием уравнений движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv \quad (11.22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu \quad (11.23)$$

Умножим уравнение (11.22) на u , а уравнение (11.23) – на v и сложим эти уравнения. Уравнение для кинетической энергии имеет вид:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial (E + \Phi)}{\partial x} + v \frac{\partial (E + \Phi)}{\partial y} = 0 \quad (11.24)$$

Умножая уравнение (11.24) на Φ , а уравнение (*) на Φ и на E , и суммирую полученные уравнения, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi^2 / 2 + E\Phi) + \frac{\partial}{\partial x} (u\Phi(E + \Phi)) + \frac{\partial}{\partial y} (v\Phi(E + \Phi)) = 0. \quad (11.25)$$

В результате интегрирования уравнения (11.18) по области D

$$\text{с учетом граничных условий, имеем: } \frac{\partial}{\partial t} \iint_D \left(\frac{\Phi^2}{2} + E\Phi \right) dx dy = 0. \quad (11.26)$$

Таким образом, величина $\iint_D \left(\frac{\Phi^2}{2} + E\Phi \right) dx dy = const$ является **интегральным энергетическим инвариантом модели мелкой воды.**

Рассмотрим еще один инвариант – **потенциальная энтропия.**

Обозначим $\tilde{u} = u\Phi, \tilde{v} = v\Phi, \tilde{\Omega} = \frac{\Omega + l}{\Phi}$. С помощью этих обозначений запишем уравнения движения в виде

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \tilde{v}\tilde{\Omega} + \frac{\partial}{\partial x} (E + \Phi) = 0 \quad (11.27)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u}\tilde{\Omega} + \frac{\partial}{\partial y} (E + \Phi) = 0. \quad (11.28)$$

С помощью уравнений (11.20) и (11.21) получим уравнение потенциального вихря скорости в виде

$$\Phi \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial y} \right) + \tilde{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial (u\Phi)}{\partial x} + v \frac{\partial (v\Phi)}{\partial y} \right) = 0$$

Поскольку $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial (u\Phi)}{\partial x} + v \frac{\partial (v\Phi)}{\partial y} = 0$, то $\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial y} = 0$.

Поэтому, для прямоугольной области имеем

$$\iint_D \Phi \frac{\Omega^2}{2} dx dy = 0.$$

Таким образом, для модели мелкой воды потенциальная энтрофия сохраняется, то есть является интегральным инвариантом.

Литература.

1. Белов П.И., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. Л.: Гидрометеиздат., 1989, 376 стр.
2. Р.П.Ретинская Р.П. О.Г.Анискина. Конечно-разностные методы в гидродинамическом моделировании атмосферных процессов. Учебное пособие. РГГМУ, 2002, 173 стр.
3. Л.С.Гандин.А.С.Дубов. Численные методы краткосрочного прогноза погоды. Л. Гидрометеиздат . 1968, 427 стр.
4. Г. С. Хакимзянов, С. Г. Черный. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ Часть 4. Численные методы решения задач для уравнений гиперболического типа Учебное пособие. Новосибирск. 2014.
5. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. – Л.Гидрометеиздат, 1979.